ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES
DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1994

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, à valeurs réelles.

E est muni de la norme $f \longmapsto \|f\| = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f_n la fonction définie par $f_n(x)=\cos(nx)$ et g_n celle définie par $g_n(x)=\sin(nx)$. T_n désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par f_0 si $n=0$, par $f_0, f_1, g_1, \ldots\ldots, f_n, g_n$ si $n \geq 1$.

Si $f \in E$ on note $A_n(f)=\inf_{\varphi\in T_n} \|f-\varphi\|$.

Partie A.

1) Soit $\varphi \in T_n$ avec $\varphi(x)=\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$.

a) Montrer que pour tout k, $0\leq k\leq n$, $a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos(kx)dx$ et que pour tout k, $1\leq k\leq n$, $b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\sin(kx)dx$.

b) Quelle est la dimension de T_n?

c) Montrer que si $\varphi \in T_n$, $\varphi^2 \in T_{2n}$ avec $\varphi^2(x)=[\varphi(x)]^2$.

2) Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

a) Donner le développement en série de Fourier de f.

b) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2(2N+1)}$.

c) En déduire un majorant de $A_n(f)$ en fonction de n .

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $k_n(t) = \left[\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^4$ pour $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

a) Montrer que k_n se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ appartenant à E qui sera encore notée k_n.

b) On pose $\lambda_n = \int_{-\pi}^{\pi} k_n(t)dt$. Montrer que pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$ et en déduire que $\lambda_n \geq \frac{2^5}{\pi^3} n^3$.

c) On pose $h_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} k_n(t)$.

c-1) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{n}} t\, h_n(t)dt \leq \frac{1}{\lambda_n}\frac{n^2\pi^6}{2^5}$ puis que si $n \geq 2$ pour tout entier p, $1 \leq p \leq n-1$, $\int_{\frac{p\pi}{n}}^{(p+1)\frac{\pi}{n}} t\, h_n(t)dt \leq \frac{p+1}{p^4}\frac{\pi^2 n^2}{\lambda_n}$

c-2) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec

$$u_n = n\int_0^{\frac{\pi}{n}} t\, h_n(t)dt \quad \text{est bornée.}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ on a les égalités

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)\frac{x}{2} = \frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{\sin\frac{x}{2}}.$$

b) En déduire que $h_n \in T_{2n-2}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E$. On note J_n la fonction définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$J_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)h_n(t)dt .$$

a) Montrer que $J_n \in T_{2n-2}$.

b) On suppose f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b-1) Montrer qu'il existe un réel c>0 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$| f(x)-J_n(x) | \leq c \frac{\| f' \|}{n}$$,c ne dépendant ni de f ni de n.

b-2) Montrer qu'il existe un réel $c_1>0$ tel que

$$A_n(f) \leq c_1 \frac{\| f' \|}{n}$$, c_1 ne dépendant ni de f ni de n.

Partie B Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) Soit $f \in E$. On note s_n l'endomorphisme de E défini par $f \longmapsto s_n(f)$

avec, $\forall x \in \mathbb{R}$, $s_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(kx)+b_k(f)\sin(kx))$

et $s_0(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2}$,les $a_k(f)$ et les $b_k(f)$ étant les coefficients de Fourier de f .

a) Montrer que $s_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin \frac{x-t}{2}} f(t)dt$.

b) On note $\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k(f)$ et $v_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} s_k(f)$.

b-1) Montrer que $\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\sin n\frac{x-t}{2}}{\sin \frac{x-t}{2}} \right]^2 f(t)dt$.

b-2) Donner la valeur de $\frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\sin n\frac{x-t}{2}}{\sin \frac{x-t}{2}} \right]^2 dt$ et en déduire que

$\| \sigma_n(f) \| \leq \| f \|$ puis que $\| v_n(f) \| \leq 3\| f \|$.

c) Soit $\varphi \in T_n$. Comparer $\forall k \geq n$. $s_k(\varphi)$ et φ et en déduire que $\forall f \in E$

$\| f-v_n(f) \| \leq 4\| f-\varphi \|$.

2) f est ici la fonction définie dans la partie A 2) .

Déduire de la partie A 2) et de la partie B 1) c) qu'il existe A > 0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n(f) \geq \frac{A}{n}$.

FIN